Postulados de la mecánica cuántica

Mecánica Cuántica I
Tecnológico de Monterrey, México
Julio César Gutiérrez Vega

18 de enero de 2012

1. **Estado del sistema.** En un tiempo t, el *estado* de un sistema físico es representado por un vector normalizado $|\phi(\mathbf{r},t)\rangle$ en un espacio *discreto* o *contínuo* de estados, concretamente en un espacio de Hilbert. (*i.e. un espacio de producto interno que es completo con respecto a la norma* $\|\phi\| = \sqrt{\langle\phi|\phi\rangle}$.)

2. **Observables.** Cada variable dinámica (e.g. posición, momentum, etc.) que se representa por un operador lineal Hermitiano A es un *observable* del sistema.

   a) El *valor esperado* del observable A para un sistema en el estado $|\phi\rangle$ se define como
   $$\langle A_\phi\rangle = \langle\phi|A|\phi\rangle \in \mathbb{R}, \qquad \text{ó equivalentemente} \qquad \langle A_\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x)\ A\ \phi(x)\ \mathrm{d}x. \tag{1}$$

   b) Los observables cuánticos A se obtienen directamente de los observables clásicos $\mathcal{A}(x,p,t)$ en la formulación de Hamilton, con la substitución $A = \mathcal{A}(x \to x, p \to -\mathrm{i}\hbar\ \partial/\partial x, t)$, donde x, p son los coordenadas y momentos generalizados del sistema.

3. **Postulado de medición.** Sean $\{a_1, a_2, ..., a_N\}$ y $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, ..., |v_N\rangle\}$ los eigenvalores y eigenvectores del observable A, tal que $A|v_n\rangle = a_n|v_n\rangle$.
   Consideremos un sistema físico que se encuentra en el estado $|\phi\rangle$.

   a) Los únicos resultados posibles de la medición de A son los eigenvalores $\{a_1, a_2, ..., a_N\}$ de A.

   b) La probabilidad de medir el eigenvalor a_n esta dada por
   $$\mathcal{P}(a_n) = |\langle v_n|\phi\rangle|^2. \tag{2}$$
   Note que $\langle v_n|\phi\rangle$ es simplemente el n-esimo coeficiente de la expansión de $|\phi\rangle$ en la base ortonormal eigenvectores $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, ..., |v_N\rangle\}$.

   c) Como resultado del proceso de medición, el estado del sistema cambia de $|\phi\rangle$ a $|v_n\rangle$.

   d) (Caso de eigenvalor degenerado) Si el eigenvalor a_n presenta degenerancia, la probabilidad es $\mathcal{P}(a_n) = \sum_{k=1}^{g} \left|\langle v_n^{(k)}|\phi\rangle\right|^2$, donde $|v_n^{(1)}\rangle, |v_n^{(2)}\rangle, ..., |v_n^{(g)}\rangle$ son los g eigenvectores ortonormales degenerados correspondientes al eigenvalor a_n y que cubren el sub-espacio ε_n. Como resultado del proceso de medición, el estado del sistema es la proyección normalizada de $|\phi\rangle$ hacia el sub-espacio ε_n, esto es $P_n|\phi\rangle / \sqrt{\langle\phi|P_n|\phi\rangle}$, donde P_n es el proyector hacia ε_n.

4. **Evolución temporal.** La evolución temporal de la función de estado $|\phi(t)\rangle$ obedece la ecuación de Schrödinger
   $$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\phi(t)\rangle = H|\phi(t)\rangle, \tag{3}$$
   donde H es el operador Hamiltoniano (observable de energía)
   $$H = K + U = \frac{p^2}{2m} + U = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + U = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U. \tag{4}$$