# Botiquín básico de Algebral Lineal para Mecánica Cuántica

Julio César Gutiérrez Vega
Photonics and Mathematical Optics Group
Tecnológico de Monterrey, México
http://homepages.mty.itesm.mx/jgutierr/

11 de enero de 2012

Estos apuntes contienen los fundamentos de álgebra matricial mínimos necesarios para iniciar con el curso de Mecánica Cuántica. Los detalles y demonstraciones se pueden consultar en libros más especializados del tema.

## Índice

1. Espacios vectoriales lineales . . . 1
2. Linealidad . . . 2
3. Espacio dual, kets, bras, producto interno y bases ortonormales . . . 3
4. Definición de matrices especiales . . . 5
5. Transformaciones lineales, operadores y conmutador . . . 6
    5.1. Propiedades de conmutadores . . . 7
6. Eigenvalores y eigenvectores . . . 7
    6.1. Caso especial de una matriz de $2 \times 2$ . . . 7
7. Definición y propiedades de matrices Hermitianas y unitarias . . . 8
8. Matrices similares y diagonalización . . . 10
    8.1. Cambio de base de una transformación lineal . . . 11
    8.2. Diagonalización de matrices Hermitianas . . . 12
9. Ejemplo: 2 masas acopladas por resortes . . . 12

## 1. Espacios vectoriales lineales

**Definition 1** ***Un espacio vectorial lineal*** $\mathbf{V}$ *es una colección de objetos* $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, ..., |v_N\rangle\} \in \mathbf{V}$ *reales o complejos llamados vectores para los cuales*

1. Hay una regla de suma bien definida (cerradura)
$$|v_1\rangle + |v_2\rangle \in \mathbf{V}. \tag{1}$$

2. Hay una regla de multiplicación por un escalar $a$ bien definida (cerradura)
$$a \ |v\rangle \in \mathbf{V}. \tag{2}$$

3. Hay un vector nulo $|0\rangle$ tal que
$$|v\rangle + |0\rangle = |v\rangle. \tag{3}$$

4. Haya un vector inverso aditivo $|-a\rangle$ tal que
$$|v\rangle + |-v\rangle = |v\rangle - |v\rangle = 0. \tag{4}$$

**Propiedades**

1. La suma es conmutativa
$$|v_1\rangle + |v_2\rangle = |v_2\rangle + |v_1\rangle \tag{5}$$

2. La suma es asociativa
$$|v\rangle + (|u\rangle + |w\rangle) = (|v\rangle + |u\rangle) + |w\rangle = |v\rangle + |u\rangle + |w\rangle \,. \tag{6}$$

3. La suma es distributiva
$$\begin{aligned}(a+b)(|u\rangle + |v\rangle) &= a(|u\rangle + |v\rangle) + b(|u\rangle + |v\rangle) && \text{(7a)}\\ &= (a+b)|u\rangle + (a+b)|v\rangle && \text{(7b)}\\ &= a|u\rangle + a|v\rangle + b|u\rangle + b|v\rangle && \text{(7c)}\end{aligned}$$

4. La multiplicación es asociativa
$$a(b|v\rangle) = (ab)|v\rangle = ab|v\rangle \tag{8}$$

**Ejemplos de espacios vectoriales:** Polinomios de grado $n$, vectores en 3D, matrices de $2 \times 2$.

## 2. Linealidad

**Definition 2** *Una* ***combinación lineal*** *de vectores del espacio* $\mathbf{V}$ *es una expresión de la forma*
$$a_1|v_1\rangle + a_2|v_2\rangle + ... + a_N|v_N\rangle \,. \tag{9}$$

**Definition 3** *Un vector* $|w\rangle$ *es* ***linealmente independiente*** *de los vectores* $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, ..., |v_N\rangle\}$ *si no puede escribirse como una combinación lineal de ellos.*

**Definition 4** *Una colección de vectores* $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, ..., |v_N\rangle\}$ ***cubre*** *el espacio* $\mathbf{V}$ *si cada vector* $|w\rangle \in \mathbf{V}$ *se puede expresar con una combinación*
$$|w\rangle = a_1|v_1\rangle + a_2|v_2\rangle + ... + a_N|v_N\rangle \,. \tag{10}$$

**Definition 5** *Una* ***base*** *es un conjunto de vectores linealmente independientes que cubren el espacio* $\mathbf{V}$*.*
*Ejemplos*

*a)* $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}\}$, *son una base para el espacio de vectores en 3D.*

*b)* $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$, *son una base para el espacio de matrices de* $2 \times 2$.

**Definition 6** *La* ***dimensión*** *de la base es el número mínimo de vectores necesarios para formar la base. La dimensión puede ser* ***finita*** *(e.g. Vectores unitarios) ó* ***infinita*** *(e.g. Polinomios de Hermite).*
***Notación****: Si un espacio vecorial tiene dimensión n comunmente se escribe*

$$\begin{aligned}&\mathbf{V}^n(\mathbb{R}) \;\; \textit{si todos los elementos son reales}\\ &\mathbf{V}^n(\mathbb{C}) \;\; \textit{si algún elemento es complejo}\end{aligned}$$

# 3. Espacio dual, kets, bras, producto interno y bases ortonormales

La notación de Dirac asume que los estados de un sistema físico se representan por un conjunto de *vectores columna* denominados **kets**

$$\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, ..., |v_N\rangle\} \in \mathbf{V}, \qquad |a\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Por ejemplo, los estados de spin del electrón se representan en una base de *espinores*

$$|+\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad |-\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Para cada espacio vectorial $\mathbf{V}$ existe un espacio dual $\mathbf{V}^\dagger$ formado por los vectores renglón adjuntos (transpuesto conjugados) llamados **bras**

$$\{\langle v_1|, \langle v_2|, ..., \langle v_N|\} \in \mathbf{V}^\dagger, , \qquad \langle a| = \begin{bmatrix} a_1^*, & a_2^*, & \cdots & a_N^* \end{bmatrix} \tag{13}$$

Algunas propiedades de los bras y ket son

1. Para cada ket corresponde un bra

$$|v\rangle = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle v| = \begin{bmatrix} v_1^*, & v_2^*, & \cdots & v_N^* \end{bmatrix}. \tag{14}$$

2. Esta correspondencia es anti-lineal. Si $c$ es una constante compleja

$$|v\rangle\, c \qquad \Leftrightarrow \qquad c^* \langle v|. \tag{15}$$

Equivalentemnte, el ket $|cv\rangle$ está asociado al bra $\langle cv|$, pero si intentamos sacar la constante, recordar que

$$|cv\rangle = |v\rangle\, c, \qquad \langle cv| = c^* \langle v| \tag{16}$$

**Definition 7** *El* ***PRODUCTO INTERNO*** *de dos vectores $|u\rangle$ y $|w\rangle$*

$$\langle u|w\rangle = \begin{bmatrix} u_1^*, & u_2^*, & \cdots & u_N^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} = \langle w|u\rangle^* = \left\{ \begin{bmatrix} w_1^*, & w_2^*, & \cdots & w_N^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \right\}^* \tag{17}$$

*es un número complejo (en general) que resulta de multiplicar el bra $\langle u|$ por el ket $|w\rangle$ y que satisface la propiedad de linealidad*

$$\langle u| (a\,|x\rangle + b\,|y\rangle) = a\,\langle u|x\rangle + b\,\langle u|y\rangle. \tag{18}$$

**Definition 8** *El* ***PRODUCTO EXTERNO*** *de dos vectores $|v\rangle$ y $|w\rangle$*

$$|v\rangle\langle w| = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^*, & w_2^*, & \cdots & w_N^* \end{bmatrix}, \tag{19}$$

*es un operador. La ventaja de la notación de Dirac, es que si este operador $|v\rangle\langle w|$ actúa sobre un ket $|a\rangle$, i.e.*

$$|v\rangle\langle w|a\rangle, \tag{20}$$

*esperamos obtener un ket. Note que la cantidad $\langle w|a\rangle$ es un número complejo (producto interno de $w$ y $a$). Consequentemente $|v\rangle\langle w|a\rangle$ es un ket.*

**Definition 9** *La* ***NORMA*** *de un vector* $|u\rangle$ *se define como*

$$|u| = \sqrt{\langle u|u\rangle} \geq 0, \qquad |u| = 0 \text{ si y solo si } |u\rangle = 0. \tag{21}$$

**Definition 10** *La* ***FASE*** *relativa de dos vectores* $|u\rangle$ *y* $|w\rangle$ *se define como*

$$\arg\langle u|w\rangle = \arccos\sqrt{\frac{\langle u|w\rangle\langle w|u\rangle}{\langle u|u\rangle\langle w|w\rangle}}. \tag{22}$$

**Definition 11** *Dos vectores* $|u\rangle$ *y* $|w\rangle$ *son* ***ORTOGONALES*** *si*

$$\langle u|w\rangle = 0. \tag{23}$$

**Definition 12** *Una* ***BASE ORTONORMAL*** *del espacio vectorial* $\mathbf{V}$ *es un conjunto de vectores linealmente independientes* $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, ..., |v_N\rangle\} \in \mathbf{V}$ *que son ortogonales entre si y tienen norma igual a 1, esto es*

$$\langle v_j|v_k\rangle = \delta_{jk}. \tag{24}$$

**Ejemplo de operador lineal: El proyector hacia un ket $|u\rangle$**

Sea $|v\rangle$ un ket normalizado, i.e. $\langle u|u\rangle = 1$. Considere el operador $P_u$ definido por

$$P_u = |u\rangle\langle u|, \tag{25}$$

y aplícalo a un ket arbitrario $|a\rangle$ :

$$P_u|a\rangle = |u\rangle\langle u|a\rangle. \tag{26}$$

$P_u$ actuando sobre $|a\rangle$ da un ket proporcional a $|u\rangle$. El coeficiente de proporcionalidad $\langle u|a\rangle$ es el producto escalar de $|u\rangle$ y $|a\rangle$. De esta forma, el operador $P_u = |u\rangle\langle u|$ es el proyector de un ket arbitrario sobre el ket $|u\rangle$.

El proyector satisface

$$P_u^2 = P_uP_u = |u\rangle\langle u|u\rangle\langle u| = |u\rangle\langle u| = P_u, \tag{27}$$

que equivale a decir que proyectar dos veces sobre un vector es igual a proyectar solo una vez.

**Ejemplo de operador lineal: El proyector hacia un espacio**

Sean $|u_1\rangle, |u_2\rangle, ..., |u_N\rangle$ una base ortonormal para un subespacio $U$, tal que $\langle u_m|u_n\rangle = \delta_{mn}$. El **operador de proyección**

$$P = \sum_{n=1}^{N} |u_n\rangle\langle u_n|, \tag{28}$$

constituye un proyector del ket $|a\rangle$ al subespacio $U$

$$P|a\rangle = \sum_{n=1}^{N} |u_n\rangle\langle u_n|a\rangle, \tag{29}$$

ya que $P|a\rangle$ da la superposición lineal de proyecciones de $|a\rangle$ en los vectores base $|u_n\rangle$, esto es, la proyección de $|a\rangle$ en el subespacio $U$.

**Ejemplo: Proceso de normalización de Gram-Schmidt.**

Para construir una base ortonormal $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, ..., |e_N\rangle\}$ a partir de una base arbitraria $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, ..., |v_N\rangle\}$ se aplica el proceso de Gram-Schmidt

1. Normalizar el primer vector

$$|e_1\rangle = \frac{|v_1\rangle}{||v_1\rangle|}. \tag{30}$$

2. Construir un vector ortonormal a $|e_1\rangle$

$$|e_2\rangle = \frac{|v_2\rangle - |e_1\rangle \langle e_1|v_2\rangle}{||v_2\rangle - |e_1\rangle \langle e_1|v_2\rangle|}. \tag{31}$$

3. Construir un vector ortonormal a $|e_1\rangle$ y $|e_2\rangle$

$$|e_3\rangle = \frac{|v_3\rangle - |e_1\rangle \langle e_1|v_3\rangle - |e_2\rangle \langle e_2|v_3\rangle}{||v_3\rangle - |e_1\rangle \langle e_1|v_3\rangle - |e_2\rangle \langle e_2|v_3\rangle|}, \tag{32}$$

y así sucesivamente.

# 4. Definición de matrices especiales

Previamente a definir algunas matrices especiales, es importante definir dos características importantes de una matriz.

**Definition 13** *El* ***DETERMINANTE*** *de una matriz cuadrada* $\mathbf{A} = \{a_{jk}\}$ *es un número representado por* $\det \mathbf{A}$ *y cuya fórmula general es*

$$\det \mathbf{A} = \pm \sum a_{1k_1} a_{2k_2} ... a_{nk_n}, \tag{33}$$

*donde los índices de columna* $k_1, k_2, ..., k_n$ *son tomados del conjunto* $1, 2, ..., n$ *sin repeticiones. El signo positivo (negativo) es asumido si la permutación* $(k_1, k_2, ..., k_n)$ *es par (impar). Para una matriz de* $2 \times 2$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc. \tag{34}$$

***Propiedades***

$$\begin{aligned} \det (a\mathbf{A}) &= a^n \det \mathbf{A} & (35) \\ \det \mathbf{AB} &= \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}. & (36) \\ \det \left(\mathbf{A}^T\right) &= \det \mathbf{A}, & (37) \\ \det \left(\mathbf{A}^{-1}\right) &= (\det \mathbf{A})^{-1} & (38) \end{aligned}$$

**Definition 14** *La* ***TRAZA*** *de una matriz cuadrada* $\mathbf{A} = \{a_{jk}\}$ *es la suma de los elementos de su diagonal central, i.e.*

$$\text{Tr } \mathbf{A} = \sum a_{jj}. \tag{39}$$

***Propiedades***

$$\begin{aligned} \text{Tr } (a\mathbf{A}) &= a \text{ Tr } \mathbf{A} & (40) \\ \text{Tr } \mathbf{AB} &= \text{Tr } \mathbf{BA}. & (41) \\ \text{Tr } \left(\mathbf{A}^T\right) &= \text{Tr } \mathbf{A}, & (42) \\ \text{Tr } \left(\mathbf{A}^{-1}\right) &= (\text{Tr } \mathbf{A})^{-1} & (43) \end{aligned}$$

Definamos ahora un conjunto de matrices especiales:

**Definition 15** *La matriz* ***IDENTIDAD*** *se define con* $I = \delta_{mn}$*, esto es*

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{44}$$

*La matriz identidad siempre es cuadrada.*

**Definition 16** *La* ***INVERSA*** $\mathbf{A}^{-1}$ *de una matriz* $\mathbf{A} = \{a_{jk}\}$ *corresponde a la matriz tal que*

$$\mathbf{A}\ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = I, \tag{45}$$

*y satisface la propiedad*

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}. \tag{46}$$

*No todas las matrices tienen inversa. Un requisito necesario para que* $\mathbf{A}$ *tenga inversa es que* $\det \mathbf{A} \neq 0$. *Para una matriz de* $2 \times 2$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{47}$$

**Definition 17** *La* ***TRANSPUESTA*** *de una matriz* $\mathbf{A} = \{a_{jk}\}$ *corresponde a la matriz*

$$\mathbf{A}^T = \{a_{kj}\}, \tag{48}$$

*y satisface las propiedades*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T, \tag{49}$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T, \qquad i.e. \qquad \mathbf{AB} = \left(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T\right)^T. \tag{50}$$

**Definition 18** *La* ***ADJUNTA*** *de la matriz* $\mathbf{A} = \{a_{jk}\}$ *se define como la* ***transpuesta conjugada***

$$\mathbf{A}^\dagger = \left(\mathbf{A}^T\right)^* = (\mathbf{A}^*)^T, \tag{51}$$

*y satisface la propiedad*

$$(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger. \tag{52}$$

***Ejemplo****: El bra de un ket es la adjunta*

$$|v\rangle = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle v| = \begin{bmatrix} v_1^*, & v_2^*, & \cdots & v_N^* \end{bmatrix}. \tag{53}$$

# 5. Transformaciones lineales, operadores y conmutador

**Definition 19** *Un* ***OPERADOR*** $\mathbf{T}$ *transforma un ket* $|a\rangle \in \mathbf{V}$ *en otro ket* $|b\rangle \in \mathbf{V}$. *Esto se expresa de la forma*

$$|b\rangle = \mathbf{A}\ |a\rangle. \tag{54}$$

Los operadores también pueden operar sobre los vectores duales (bras).

$$\text{Si } |b\rangle = \mathbf{A}\ |a\rangle \qquad \text{entonces} \qquad \langle b| = \langle a|\ \mathbf{A}^\dagger. \tag{55}$$

Las **propiedades de linealidad** de los operadores son

$$\mathbf{T}\ (c_1\ |a\rangle + c_2\ |b\rangle) = c_1\ \mathbf{T}\,|a\rangle + c_2\ \mathbf{T}\,|b\rangle, \tag{56a}$$

$$(\langle a|\, c_1 + \langle b|\, c_2)\,\mathbf{T} = \langle a|\,\mathbf{T}\ c_1 + \langle b|\,\mathbf{T}\ c_2, \tag{56b}$$

donde $c_1$ y $c_2$ son constantes.

**Producto de operadores** representan una transformación unificada y en secuencia

$$\mathbf{AB}\,|a\rangle = \mathbf{M}\,|a\rangle, \qquad \text{donde} \qquad \mathbf{M} = \mathbf{AB}. \tag{57}$$

En general 2 operadores no conmutan

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}. \tag{58}$$

**Definition 20** *El* ***CONMUTADOR*** *de los operadores* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *se define como*

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}] \equiv \mathbf{AB} - \mathbf{BA}. \tag{59}$$

**Example 21** *Sean los operadores* $A = x$ *y* $B = d/dx$*, entonces el conmutador* $[A, B] = [x, d/dx]$ *está dado por*

$$\left[x, \frac{d}{dx}\right] f = x\frac{df}{dx} - \frac{d}{dx}(xf) = -f, \tag{60}$$

*por lo tanto concluimos que el operador* $x$ *y el operador derivada* $d/dx$ *no conmutan y de hecho*

$$\left[x, \frac{d}{dx}\right] = -1. \tag{61}$$

## 5.1. Propiedades de conmutadores

- Si $[\mathbf{A},\mathbf{B}] = 0$ entonces $A$ y $B$ conmutan. Se cumple que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ solo si las matrices son diagonales.
- La traza del producto $\mathbf{AB}$ satisface

$$\mathrm{Tr}\left(\mathbf{AB}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{BA}\right), \qquad \text{entonces} \qquad \mathrm{Tr}\left[\mathbf{A},\mathbf{B}\right] = 0. \tag{62}$$

- Sean $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ tres operadores

$$\begin{aligned} [A,B] + [B,A] &= 0, && (63a)\\ [A,A] &= 0, && (63b)\\ [A,B+C] &= [A,B] + [A,C], && (63c)\\ [A,B]^\dagger &= \left[B^\dagger, A^\dagger\right], && (63d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [A,BC] &= [A,B]\,C + B\,[A,C], && (64a)\\ [AB,C] &= A\,[B,C] + [A,C]\,B, && (64b) \end{aligned}$$

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0. \tag{65}$$

# 6. Eigenvalores y eigenvectores

**Definition 22** *Los* ***eigenvectores*** *del operador* $\mathbf{A}$ *son aquellos vectores* $|a_n\rangle$ *que satisfacen la relación*

$$\mathbf{A}\,|a_n\rangle = \mu_n\,|a_n\rangle\,, \tag{66}$$

*donde* $\mu_n$ *es una constante compleja llamada* ***eigenvalor****.*

Los eigenvectores se autoreproducen después de la transformación excepto por un factor de escala.
Cuando 2 o más eigenvectores tienen el mismo eigenvalor, se dice que son **DEGENERADOS**.
La **MULTIPLICIDAD** del eigenvalor corresponde al número de eigenvectores linealmente independientes que comparte.

## 6.1. Caso especial de una matriz de $2 \times 2$

Los eigenvalores de la matriz

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{67}$$

están dados por

$$\mu_{\pm} = \frac{\mathrm{tr}}{2} \pm \left[ \left( \frac{\mathrm{tr}}{2} \right)^2 - \det \right]^{1/2} = \frac{1}{2} \left[ a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc} \right], \tag{68}$$

donde $\mathrm{tr} = a + d$ es la traza y $\det = ad - bc$ es el determinante.

Los eigenvectores $|v_{\pm}\rangle$ son

$$|v_{\pm}\rangle = C \begin{bmatrix} b \\ \mu_{\pm} - a \end{bmatrix}, \tag{69}$$

donde $C$ es cualquier constante. También podemos escribir

$$|v_{\pm}\rangle \propto \begin{bmatrix} (\mu_{\pm} - d)/c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( a - d \mp \sqrt{(a-d)^2 + 4bc} \right)/2c \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{70}$$

# 7. Definición y propiedades de matrices Hermitianas y unitarias

**Definition 23** *La matriz **cuadrada real** $\mathbf{A} = \{a_{jk}\} \in \mathbb{R}$ es **SIMETRICA** o **ANTI-SIMETRICA** si es igual a su transpuesta o al negativo de su transpuesta, respectivamente.*

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}. \qquad \mathbf{A}^T = -\mathbf{A}. \tag{71}$$

*Cualquier matriz cuadrada real se puede descomponer en su parte simétrica y su parte anti-simétricaC*

$$\mathbf{A} = \left( \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2} \right) + \left( \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T}{2} \right) \tag{72}$$

**Definition 24** *La matriz $\mathbf{H} = \{h_{jk}\}$ es **HERMITIANA** (o **AUTO-ADJUNTA**) si es igual a su adjunta*

$$\mathbf{H}^{\dagger} = \mathbf{H}, \quad \text{ó equivalentemente} \quad \mathbf{H}^T = \mathbf{H}^* \tag{73}$$

*o **ANTI-HERMITIANA** si es igual al negativo de su adjunta,*

$$\mathbf{H}^{\dagger} = -\mathbf{H}, \quad \text{ó equivalentemente} \quad \mathbf{H}^T = -\mathbf{H}^* \tag{74}$$

*Una matriz Hermitiana tiene las **propiedades***

1. *Los elementos de su diagonal principal de una matriz Hermitiana siempre son reales.*
2. *Los eigenvalores de una matriz Hermitiana siempre son reales.*
3. *Los eigenvalores de una matriz anti-Hermitiana siempre son imaginarios o cero..*
4. *Eigenvectores correspondientes a diferentes eigenvalores de una matriz hermitiana son ortogonales.*
5. *Si una matriz Hermitiana tiene $N$ eigenvalores distintos, los eigenvectores forman una base ortonormal del espacio de dimensión $N$.*
6. *Cualquier matriz $\mathbf{A}$ se puede descomponer en su parte Hermitiana y anti-Hermitiana*

$$\mathbf{A} = \left( \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\dagger}}{2} \right) + \left( \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\dagger}}{2} \right). \tag{75}$$

7. *Si $\mathbf{H}$ es una matriz Hermitiana la operación*

$$\langle x|\mathbf{H}|x\rangle = h \in \mathbb{R} \tag{76}$$

*se conoce como **forma Hermitiana** y su resultado **siempre es un número real.***

8. *Si* $\mathbf{H}$ *es una matriz anti-Hermitiana la operación*

$$\langle x|\mathbf{H}|x\rangle = h \in \mathrm{Im} \tag{77}$$

*se conoce como* ***forma anti-Hermitiana*** *y su resultado* ***siempre es un número imaginario puro.***

9. *Si* $\mathbf{H}$ *es una matriz Hermitiana, la norma de la matriz es simplemente multiplicarla por si misma, i.e.*

$$\langle \mathbf{H}|\mathbf{H}\rangle = \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{H} = \mathbf{H}^{2} \tag{78}$$

10. *Si* $\mathbf{H}$ *es una matriz Hermitiana,*

    a*) su determinante es igual al producto de sus eigenvalores,*

    b*) su traza es igual a la suma de sus eigenvalores.*

11. *La diagonalización de una matriz Hermitiana* $\mathbf{H}$ *está dada por la transformación*

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{D}, \tag{79}$$

*donde* $\mathbf{U}$ *es una matriz unitaria cuyas columnas son el eigenvectores normalizados de* $\boldsymbol{A}$ *y* $\boldsymbol{D}$ *es una matriz diagonal con los eigenvalores.*

12. *Equivalentemente, la expansión de una matriz Hermitiana está dada por*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1}. \tag{80}$$

**Definition 25** *La matriz* $\mathbf{A} = \{a_{jk}\}$ *es* ***UNITARIA*** *si*

$$\langle \mathbf{A}|\mathbf{A}\rangle = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} = 1, \quad \textit{ó equivalentemente} \quad \mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}^{-1} \tag{81}$$

*es decir su adjunta y su inversa son iguales.*
*Una matriz unitaria tiene las* ***propiedades***

1. *El producto de matrices unitarias es unitario.*

2. *Las columnas y renglones de una matriz unitaria forman una base ortonormal para el espacio de dimensión* $N$*.*

3. *Los eigenvalores de una matriz unitaria son números complejos de módulo unitario, i.e.* $\exp\left(i\phi_n\right)$*.*

4. *Los eigenvectores de una matriz unitaria son mutuamente ortogonales.*

5. *Matrices unitarias preservan los productos internos. Si*

$$|a'\rangle = \mathbf{U}\,|a\rangle \qquad y \qquad |b'\rangle = \mathbf{U}\,|b\rangle\,, \tag{82}$$

*entonces*

$$\langle b'|a'\rangle = \left\langle b|\mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{U}|a\right\rangle = \langle b|a\rangle\,. \tag{83}$$

6. *Si* $\mathbf{U}$ *es una matriz unitaria,*

    a*) su determinante es igual al producto de sus eigenvalores,*

    b*) su traza es igual a la suma de sus eigenvalores.*

7. *Matrices de rotación son ejemplos de matrices unitarias.*

# 8. Matrices similares y diagonalización

**Definition 26** *Las matrices* $\mathbf{A} = \{a_{jk}\}$ *y* $\mathbf{B} = \{b_{jk}\}$ *de tamaño* $N \times N$ *son* ***SIMILARES*** *(ó semejantes ó equivalentes) si existe una matriz invertible* $\mathbf{T}$ *tal que*

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\ \mathbf{A}\ \mathbf{T}^{-1}. \tag{84}$$

*La transformación de la matriz* $\mathbf{A}$ *en la matriz* $\mathbf{B}$ *se llama de TRANFORMACIÓN DE SIMILARIDAD ó equivalencia.*

**Definition 27** *Si* $\mathbf{T} \to \mathbf{U}$ *es unitaria, i.e.*

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\ \mathbf{A}\ \mathbf{U}^{-1}. \tag{85}$$

*entonces la transformación de equivalencia es UNITARIA.*

Dos matrices similares $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tienen las **propiedades**

1. $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tienen los mismos eigenvalores.
2. El determinante y la traza de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son iguales.
3. Si $\mathbf{A}$ es ortonormal, entonces $\mathbf{B}$ será ortonormal si y solo si $\mathbf{T}$ es unitaria.

**Definition 28** *Una mtariz* $\mathbf{A} = \{a_{jk}\}$ *de* $N \times N$ *es* ***DIAGONALIZABLE*** *si existe una matriz* $\mathbf{T}$ *tal que* $\mathbf{A}$ *es similar a una matriz diagonal* $\mathbf{D}$, *i.e.*

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}\ \mathbf{A}\ \mathbf{T}^{-1}. \tag{86}$$

***Corollary 29*** *Una matriz* $\mathbf{A} = \{a_{jk}\}$ *de* $N \times N$ *es diagonizable si y solo si tiene* $N$ *eigenvectores linealmente independientes. En este caso la matriz diagonal está dada por*

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_N \end{bmatrix}, \tag{87}$$

*donde* $\mu_j$ *son los eigenvalores de* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{T}$ *es una matriz cuyas columnas son los eigenvectores de* $\mathbf{A}$, *entonces*

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}\ \mathbf{A}\ \mathbf{T}^{-1}. \tag{88}$$

***Corollary 30*** *Si una matriz* $A$ *tiene* $N$ *eigenvalores distintos, entonces es diagonalizable.*

***Corollary 31 Factorización espectral de una matriz.*** *La expansión de la matriz* $\mathbf{A}$ *se puede obtener de la relación de diagonalización*

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}\ \mathbf{A}\ \mathbf{T}^{-1}, \tag{89}$$

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\ \mathbf{A}\ \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{A}\ \mathbf{T}^{-1}, \tag{90}$$

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{T} = \mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{A}. \tag{91}$$

*Así la matriz* $\mathbf{A}$ *puede factorizarse de la forma*

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{T}. \tag{92}$$

## 8.1. Cambio de base de una transformación lineal

Desde un punto de vista físico, matrices similares representan la misma transformación en diferentes sistemas de coordenadas.

Consideremos la transformación lineal definida por el operador $\mathbf{W}$

$$|b\rangle_w = \mathbf{W}\,|a\rangle_w \tag{93}$$

donde $|a\rangle_w$ y $|b\rangle_w$ están representadas en una base $\mathbf{w} = |w_1\rangle\,, |w_2\rangle\,, ..., |w_N\rangle\,.$

Si ahora se desea expresar $|a\rangle$ en términos de otra base $\mathbf{v} = |v_1\rangle\,, |v_2\rangle\,, ..., |v_N\rangle$, entonces $\mathbf{W}$ tiene que cambiar a otra matriz $\mathbf{V}$.

Consideremos que $\mathbf{C}$ es la matriz que transforma las componentes $w$ de $|a\rangle_w$ en las componentes $v$ de $|a\rangle_v\,,$ esto es $\mathbf{C}\,|a\rangle_w = |a\rangle_v\,.$

Inversamente, $\mathbf{C}^{-1}$ transforma las componentes de $v$ de $|a\rangle_v$ en las componentes $w$ de $|a\rangle_w\,,$ esto es $|a\rangle_w = \mathbf{C}^{-1}\,|a\rangle_v\,.$

Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}
|b\rangle_w &= \mathbf{W}\;\; |a\rangle_w\,, && (94a)\\
\mathbf{C}^{-1}\,|b\rangle_v &= \mathbf{W}\;\; \left[\mathbf{C}^{-1}\,|a\rangle_v\right], && (94b)\\
|b\rangle_v &= \mathbf{C}\mathbf{W}\mathbf{C}^{-1}\,|a\rangle_v\,, && (94c)\\
|b\rangle_v &= \mathbf{V}\,|a\rangle_v\,, && (94d)
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{V} = \mathbf{C}\mathbf{W}\mathbf{C}^{-1}$ es la nueva matriz de transformación en la base $\mathbf{v}$.

**Ejemplo: Base cartesiana y base espinorial**

Consideremos las bases Cartesiana y helicoidal (espinorial)

$$|x\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \qquad |y\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \qquad\qquad |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\\mathrm{i}\end{bmatrix}, \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-\mathrm{i}\end{bmatrix}, \tag{95}$$

Cualquier ket se puede expresar como una superposición en una base o en otra

$$|a\rangle_c = |x\rangle\, c_x + |y\rangle\, c_y, \qquad\qquad |a\rangle_e = |+\rangle\, c^+ + |-\rangle\, c^-. \tag{96}$$

Es fácil demostrar que si conocemos las componentes Cartesianas de $|a\rangle$ entonces las componentes espinoriales son

$$\begin{bmatrix}c^+\\c^-\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -\mathrm{i}\\1 & \mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_x\\c_y\end{bmatrix}. \tag{97}$$

Inversamente, si conocemos las espinoriales, la cartesianas serán

$$\begin{bmatrix}c_x\\c_y\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\\mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c^+\\c^-\end{bmatrix}. \tag{98}$$

Supongamos que $|a\rangle_c$ está expresado en cartesianas y se transforma acorde a

$$|b\rangle_c = \mathbf{M}\;\; |a\rangle_c\,, \tag{99}$$

donde $|b\rangle_c$ estará dado en Cartesianas.

Si ahora deseamos expresar esta transformación en espinoriales tenemos

$$|b\rangle_e = \mathbf{N}\;\; |a\rangle_e = \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{C}^{-1}\;\; |a\rangle_e\,, \tag{100}$$

donde

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -\mathrm{i}\\1 & \mathrm{i}\end{bmatrix}, \tag{101}$$

es la transformación que me convierte de cartesianas a espinoriales.

### 8.2. Diagonalización de matrices Hermitianas

En base a los resultados anteriores tenemos

**Theorem 32** *Una matriz Hermitiana* $\mathbf{A}$ *puede ser diagonalizada por un cambio unitario de base.*

**Theorem 33** *Si* $\mathbf{A}$ *es Hermitiana, entonces existe una matriz unitaria* $\mathbf{U}$ *(construida con los eigenvectores de* $\mathbf{A}$*) talque* $\mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{U}$ *es diagonal.*

#### Diagonalización simultánea de 2 matrices Hermitianas

**Theorem 34** *Si* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son dos matrices Hermitianas que conmutan, i.e.* $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$, *entonces existe (al menos) una base de eigenvectores comunes que diagonalizan ambas matrices.*

## 9. Ejemplo: 2 masas acopladas por resortes

Consideremos el sistema de 2 masas mostrado en la Fig. 1. Los bloques tienen masa $m$, los resortes que conectan a la pared una constante $K$, y el resorte que conecta las masas una constante $k$.

1. **Planteamiento del sistema de ecuaciones.** Sean $x(t)$ y $y(t)$ los desplazamientos de las masas a partir de sus posiciones de equilibrio. La aplicación de la segunda ley de Newton lleva al sistema de ecuaciones

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -Kx + k(y-x) = -(k+K)x + ky, \tag{102}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -k(y-x) + Ky = kx - (k+K)y. \tag{103}$$

Este sistema se puede escribir en forma matricial de la forma

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} -(k+K) & k \\ k & -(k+K) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \tag{104}$$

ó equivalentemente

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}|r\rangle = \mathbf{A}|r\rangle, \tag{105}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} -(k+K) & k \\ k & -(k+K) \end{bmatrix}, \qquad |r(t)\rangle = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \qquad \{x, y\} \in \mathbb{R}, \tag{106}$$

donde identificamos que $\mathbf{A}$ es Hermitiana.

2. **Eliminación del tiempo: Reducción a un problema de eigenvalores.** Si asumimos que $x(t)$ y $y(t)$ se pueden escribir de forma armónica compleja

$$x(t) = x_0 \exp(-i\omega t), \qquad y(t) = y_0 \exp(-i\omega t), \tag{107}$$

donde $\omega$ es la frecuencia de oscilación del sistema, entonces el operador segunda derivada $d^2/dt^2$ se puede sustitur por $(-i\omega)^2 = -\omega^2$, por lo tanto

$$\mathbf{A}|r_0\rangle = -\omega^2|r_0\rangle, \qquad |r_0\rangle = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \qquad \{x_0, y_0\} \in \mathbb{C}. \tag{108}$$

donde $|r_0\rangle$ es el vector de amplitudes complejas. De esta manera, las frecuencias $-\omega^2$ corresponden a los eigenvalores del operador $\mathbf{A}$.

3. **Un comentario sobre la base.** En la ecuación
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left|r\right\rangle = \mathbf{A}\left|r\right\rangle , \tag{109}$$
el vector $\left|r\right\rangle$ está expresado en una báse canónica cartesiana
$$\left|X\right\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \qquad \left|Y\right\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \tag{110}$$
que representa desplazamientos unitarios de cada masa.
En el tiempo $t$, el estado del sistema queda representado por la superposición
$$\left|r\right\rangle = \left|X\right\rangle x\left(t\right) + \left|Y\right\rangle y\left(t\right). \tag{111}$$
En la base canónica, la matriz $\mathbf{A}$ acopla los desplazamientos $x$ y $y$ através de los elementos $A_{12}, A_{21}$. Es deseable expresar $\left|r\right\rangle$ en una base diferente donde los elementos de $\left|r\right\rangle$ estén desacoplados. Es decir, una base donde $\mathbf{A}$ sea diagonal. Esta es la base de eigenvectores de $\mathbf{A}$.

4. **Los eigenvectores y eigenvalores** de la matriz $\mathbf{A}$ son
$$\left|U\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \qquad \mu_1 = -\omega_1^2 = -\frac{K}{m}, \tag{112}$$
$$\left|V\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \qquad \mu_2 = -\omega_2^2 = -\frac{2k+K}{m}. \tag{113}$$

5. **Interpretación física:** El estado $\left|r\left(t\right)\right\rangle$ del sistema se puede expresar en la nueva base ortogonal de vectores $\left|U\right\rangle$ y $\left|V\right\rangle$
$$\left|r\left(t\right)\right\rangle_{uv} = \left|U\right\rangle u\left(t\right) + \left|V\right\rangle v\left(t\right) = \begin{bmatrix}u\left(t\right)\\v\left(t\right)\end{bmatrix}, \tag{114}$$
Una oscilación proporcional al modo $\left|U\right\rangle$ (i.e. masas igualmente desplazadas de su posición de equilibrio) siempre se mantiene proporcional a ese estado y oscila a una frecuencia $\omega_1 = \sqrt{K/m}$.
Una oscilación proporcional al modo $\left|V\right\rangle$ (i.e. masas igualmente anti-desplazadas de su posición de equilibrio) siempre se mantiene proporcional a ese estado y oscila a una frecuencia $\omega_2 = \sqrt{\left(2k+K\right)/m}$.
$\left|U\right\rangle$ y $\left|V\right\rangle$ son estados de oscilación invariantes del sistema. Son los **modos de oscilación naturales** del sistema.

6. La matriz Hermitiana $\mathbf{A}$ se puede expandir como
$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{T}, \tag{115}$$
donde $\mathbf{T}$ es una matriz unitaria formada con los eigenvectores de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{D}$ es la diagonal de sus eigenvalores
$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix}\mu_1 & 0\\0 & \mu_2\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}. \tag{116}$$
De esta forma la ecuación dinámica toma la forma
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left|r\right\rangle = \mathbf{A}\left|r\right\rangle = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{T}\left|r\right\rangle , \tag{117}$$
que lleva a
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\mathbf{T}\left|r\right\rangle\right] = \mathbf{D}\left[\mathbf{T}\left|r\right\rangle\right], \tag{118}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left|r\right\rangle_{uv} = \mathbf{D}\left|r\right\rangle_{uv}, \tag{119}$$
donde vemos que la transformación de las componentes vector entre ambas bases está dada por
$$\mathbf{T}\left|r\right\rangle = \left|r\right\rangle_{uv}. \tag{120}$$

7. El sistema $|r(t)\rangle_{uv}$ evoluciona en el tiempo de acuerdo a

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}|r(t)\rangle_{uv} = \begin{bmatrix} -\omega_1^2 & 0 \\ 0 & -\omega_2^2 \end{bmatrix} |r(t)\rangle_e = \begin{bmatrix} -\omega_1^2\, u(t) \\ -\omega_2^2\, v(t) \end{bmatrix}. \tag{121}$$

Es decir, las ecuaciones están desacopladas. Por lo que podemos escribir

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_1^2 u(t), \qquad \frac{\mathrm{d}^2 v(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_2^2 v(t). \tag{122}$$

Las soluciones a estas ecuaciones armónicas están dadas por

$$u(t) = u_0(0)\exp(\mathrm{i}\omega_1 t), \qquad v(t) = v_0(0)\exp(\mathrm{i}\omega_2 t), \tag{123}$$

donde $u_0(0)$ y $v_0(0)$ son los desplazamientos en $t=0$ en la base $(u,v)$. Así, las componentes de $|r(t)\rangle_e$ en la base $|U\rangle, |V\rangle$ se desacoplan y se pueden resolver fácilmente.

8. La solución general en la base $|U\rangle, |V\rangle$ es

$$\begin{aligned} |r(t)\rangle_{uv} &= |U\rangle u(t) + |V\rangle v(t), && (124) \\ &= |U\rangle u_0(0)\exp(\mathrm{i}\omega_1 t) + |V\rangle v_0(0)\exp(\mathrm{i}\omega_2 t). && (125) \end{aligned}$$

Que puede expresarse como

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(\mathrm{i}\omega_1 t) & 0 \\ 0 & \exp(\mathrm{i}\omega_2 t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix}. \tag{126}$$

La matriz es el **propagador** en la base $|U\rangle, |V\rangle$.

9. **Expresando $|r_0\rangle$ en la base Cartesiana .**

   *a*) Expansión de los vectores $|U\rangle$ y $|V\rangle$ en la base cartesiana

$$\begin{aligned} |U\rangle &= |X\rangle a_1 + |Y\rangle a_2 = |X\rangle\langle X|U\rangle + |Y\rangle\langle Y|U\rangle = |X\rangle\frac{1}{\sqrt{2}} + |Y\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}, && (127) \\ |V\rangle &= |X\rangle a_1 + |Y\rangle a_2 = |X\rangle\langle X|V\rangle + |Y\rangle\langle Y|V\rangle = |X\rangle\frac{1}{\sqrt{2}} + |Y\rangle\frac{-1}{\sqrt{2}}, && (128) \end{aligned}$$

   es decir

$$\begin{bmatrix} |U\rangle \\ |V\rangle \end{bmatrix} = \mathbf{T}\begin{bmatrix} |X\rangle \\ |Y\rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} |X\rangle \\ |Y\rangle \end{bmatrix}. \tag{129}$$

   *b*) Expansión de las componentes $(u_0, v_0)$ en la base cartesiana

$$\begin{aligned} u_0 &= \langle U|r_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,1]\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \frac{x_0+y_0}{\sqrt{2}}, && (130) \\ v_0 &= \langle V|r_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,-1]\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \frac{x_0-y_0}{\sqrt{2}}, && (131) \end{aligned}$$

   es decir

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}. \tag{132}$$

   *c*) Sustituyendo

$$\begin{aligned} |r(t)\rangle &= \left[\frac{|X\rangle + |Y\rangle}{\sqrt{2}}\right]\frac{x_0(0)+y_0(0)}{\sqrt{2}}\exp(\mathrm{i}\omega_1 t) + \left[\frac{|X\rangle - |Y\rangle}{\sqrt{2}}\right]\frac{x_0(0)-y_0(0)}{\sqrt{2}}\exp(\mathrm{i}\omega_2 t), && (133) \\ \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= |X\rangle\frac{x_0(0)[\exp(\mathrm{i}\omega_1 t)+\exp(\mathrm{i}\omega_2 t)] + y_0(0)[\exp(\mathrm{i}\omega_1 t)-\exp(\mathrm{i}\omega_2 t)]}{2} && (134) \\ &\quad + |Y\rangle\frac{x_0(0)[\exp(\mathrm{i}\omega_1 t)-\exp(\mathrm{i}\omega_2 t)] + y_0(0)[\exp(\mathrm{i}\omega_1 t)+\exp(\mathrm{i}\omega_2 t)]}{2} && (135) \end{aligned}$$

10. **El propagador.** Esta relación se puede reescribir como

$$\begin{aligned} |r(t)\rangle &= \mathbf{P}\,|r(0)\rangle \qquad (136)\\ \begin{bmatrix} x(t)\\ y(t)\end{bmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \exp(\mathrm{i}\omega_1 t)+\exp(\mathrm{i}\omega_2 t) & \exp(\mathrm{i}\omega_1 t)-\exp(\mathrm{i}\omega_2 t)\\ \exp(\mathrm{i}\omega_1 t)-\exp(\mathrm{i}\omega_2 t) & \exp(\mathrm{i}\omega_1 t)+\exp(\mathrm{i}\omega_2 t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0)\\ y(0)\end{bmatrix}. \qquad (137)\end{aligned}$$

la cual pone de manifiesto el **propagador** del sistema en la base $|X\rangle$ y $|Y\rangle$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \exp(\mathrm{i}\omega_1 t)+\exp(\mathrm{i}\omega_2 t) & \exp(\mathrm{i}\omega_1 t)-\exp(\mathrm{i}\omega_2 t)\\ \exp(\mathrm{i}\omega_1 t)-\exp(\mathrm{i}\omega_2 t) & \exp(\mathrm{i}\omega_1 t)+\exp(\mathrm{i}\omega_2 t)\end{bmatrix}, \qquad (138)\\ &= \frac{\exp(\mathrm{i}\omega_1 t)}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} + \frac{\exp(\mathrm{i}\omega_2 t)}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}. \qquad (139)\end{aligned}$$

*a*) El propagador es independiente del estado inicial del sistema.

*b*) El propagador se puede poner de manera abstracta

$$\mathbf{P} = |U\rangle\langle U|\exp(\mathrm{i}\omega_1 t) + |V\rangle\langle V|\exp(\mathrm{i}\omega_2 t) \qquad (140)$$

11. **RESUMIENDO**: Para solucionar el problema

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}|r\rangle = \mathbf{A}\,|r\rangle\,, \qquad (141)$$

*a*) Encuentra los eigenvectores $|U\rangle\,, |V\rangle$ y eigenvalores $-\omega_1^2, -\omega_2^2$ de la matriz $\mathbf{A}$.

*b*) Construye el propagador

$$\mathbf{P} = |U\rangle\langle U|\exp(\mathrm{i}\omega_1 t) + |V\rangle\langle V|\exp(\mathrm{i}\omega_2 t)\,. \qquad (142)$$

*c*) La evolución temporal está dada por

$$|r(t)\rangle = \mathbf{P}\,|r(0)\rangle\,. \qquad (143)$$

.