Física Matemática 2

Julio César Gutiérrez Vega

Tarea 2 Derivación e integración compleja

Fecha límite de entrega: Jueves 31 de agosto de 2017
`[30 puntos]`

Resuelve los siguientes problemas

1. `[4 puntos]` Considere la función $u(x,y) = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta$.

   a) Verifique si la función $u(x,y)$ es armónica y menciones la región donde lo es.

   b) Encuentre una función $v(x,y)$ tal que $\psi(x,y) = u(x,y) + \mathrm{i}\ v(x,y)$ sea analítica

2. `[2 puntos]` Muestra que

$$\frac{1}{2\pi i}\oint z^{m-n-1}\mathrm{d}z \tag{1}$$

   con m y n enteros es una representación de la delta de Kronecker.

3. `[8 puntos]` Convierte las siguientes fórmulas de Rodrigues a su forma integral:

   a) Legendre:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n.$$

   b) Hermite:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}.$$

   c) Laguerre:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right).$$

   d) Chebyshev

$$T_n(x) = \frac{\Gamma(1/2)\sqrt{1-x^2}}{(-2)^n\,\Gamma(n+1/2)}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(1-x^2\right)^{n-1/2}\right]. \tag{2}$$

4. `[8 puntos]` Calcula las siguientes integrales:

   a) Siendo C la curva dada por $|z| = 5$:

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z^3+4z)(z+2i)}$$

   b) Siendo C un cuadrado centrado en el origen cuyos lados miden 2:

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^*}$$

   c) Siendo C el segmento de recta que va desde $-1-i$ hasta $1+i$:

$$\int_C \left(\cosh\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi y}{2} + i\sinh\frac{\pi x}{2}\sin\frac{\pi y}{2}\right)\mathrm{d}z$$

d) Siendo C el segmento de curva de una función de distribución normal para un intervalo simétrico de probabilidad de 50 %

$$\int_C \left[\frac{1}{z^4} + \frac{1}{(z^*)^2}\right] \mathrm{d}z. \tag{3}$$

5. `[8 puntos]`

a) Demostrar que $\psi(x,y) = \ln\left[(x-1)^2 + (y-2)^2\right]$ es armónica en cada región que no incluya el punto $(1,2)$.

b) Encontrar una función $\phi(x,y)$ tal que $w = \phi + i\psi$ es analítica.

c) Expresar w como una función de z.

d) Integra w sobre la circunferencia de un círculo centrado en el origen y de radio 3.